

## CONTROVÉRSIAS NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: A DEFINIÇÃO DE LOGARITMO

**André Luís Mattedi Dias**

mattedi@uefs.br

Universidade Estadual de Feira de Santana

Programa de Ensino, Filosofia e História das Ciências

### INTRODUÇÃO

A curiosidade que levou-me à leitura do artigo *Sobre os logarithmos reaes das quantidades negativas*, publicado por Leopoldo Amaral (Belém, 1893 – Salvador, 1965) em 1930<sup>1</sup>, transformou-se em espanto logo depois que li as suas primeiras linhas, pois, nelas, o autor questionou em termos insólitos um resultado obtido por Leonhard Euler (1707-1783) e já bem estabelecido entre os matemáticos daquela época: os números negativos não possuem logaritmos reais, mas uma infinidade de logaritmos imaginários. Insólitos porque ele considerou a possibilidade de um resultado matemático produzir uma revolução na matemática; discutiu aquele resultado já consagrado como sendo uma mera pretensão ou opinião, que teria sido adotada ou sido feita vencedora pelo proselitismo ou pela falta de maiores esclarecimentos dos matemáticos; e, finalmente, afirmou que não haveria razão matemática - muito pelo contrário - para que não fossem atribuídos logaritmos reais aos números negativos. Ora, estava acostumado a associar o termo revolução científica à Thomas Kuhn e fiquei espantado com a sua utilização uns trinta anos antes dele; acabara de ler o debate entre David Bloor e Bruno Latour sobre a história social das ciências e não imaginava que um engenheiro professor de matemática, antes mesmo de 1930, fosse explicar a história da matemática em termos de vencidos e vencedores, de opiniões e de proselitismo, principalmente para se referir a uma teoria que, àquela época, já era bastante difundida por quase todos os livros e em quase todos os cursos de matemática<sup>2</sup>. Curioso e espantado, comecei então a pesquisar sobre a história dos logaritmos, levantando e analisando fontes, estudando a historiografia disponível, inclusive sobre as controvérsias a respeito da natureza dos logaritmos dos negativos, que envolveram inicialmente Jean Bernoulli (1667-1748) e

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) e posteriormente Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) e o próprio Euler. Nesse trabalho, apresento os primeiros resultados dessa minha pesquisa.

## **NÚMEROS NEGATIVOS PODEM TER LOGARITMO?**

Ao longo do século XX, a grande maioria, senão a totalidade dos textos matemáticos trazem uma definição de logaritmo de números reais que exclui *a priori* os números reais negativos do seu universo de validade, isto é, definem o logaritmo ora como uma das operações inversas da potenciação, ora como a função inversa da exponencial, ou mesmo como a área de uma região do plano delimitada pelo gráfico de uma certa hipérbole<sup>3</sup>. Nesses três tipos de definições dos logaritmos de números reais, os negativos são excluídos do universo para o qual essas definições se aplicam. Do ponto de vista lógico-matemático hegemônico atualmente, somente quando são definidos os logaritmos dos números complexos, como uma das operações inversas da potenciação, é que também ficam definidos os logaritmos dos números negativos, demonstrados como sendo uma infinidade de imaginários.<sup>4</sup>

Todavia, Felix Klein (1849-1925), um dos mais proeminentes matemáticos da sua época, chegou a classificar como “um tanto arbitrarias” — até mesmo como “uma convenção autoritária” — as chamadas estipulações que resultam na exclusão dos negativos do domínio real da função logarítmica, uma vez que, de acordo com ele, suas razões não seriam tão evidentes como normalmente se supõe. Ele enfatizou como certas dificuldades eram evitadas e não eram explicadas satisfatoriamente já desde aquele tempo<sup>5</sup>. Portanto, diante das considerações de Kline, não seria estranho que um curioso perguntasse se não seria possível que os logaritmos fossem definidos de alguma outra forma, de modo que os números negativos pudessem ter logaritmos reais.

Ora, como mostra Elon Lages Lima, um proeminente matemático brasileiro, é perfeitamente possível definir uma função no conjunto dos números reais com quase as mesmas propriedades algébricas da função logarítmica usual, de modo que os números negativos sejam incluídos no seu domínio. Ou seja, a função logarítmica não precisa

necessariamente ser definida como a inversa da exponencial; é possível defini-la de uma outra forma, de modo que seja preservada a propriedade básica  $\log xy = \log x + \log y$ , ainda que o acréscimo da propriedade  $\log x = \log (-x)$  implique na perda da propriedade  $a^{\log x} = x$ , que somente valeria na forma  $a^{|\log x|} = |x|$ .<sup>6</sup>

## **HISTORIOGRAFIA DOS LOGARITMOS OU APOLOGIA DA GENIALIDADE**

Todas essas considerações acima conduziram-me ao âmbito da história e das suas narrativas: quais definições e propriedades dos logaritmos foram propostas, adotadas e trabalhadas até que fosse institucionalizada a definição hegemônica atual? Como ocorreu o processo de institucionalização da definição hegemônica atual de logaritmo? Quais os atores envolvidos? Quais debates, polêmicas ou controvérsias houve? Em quais fóruns? Quais foram os argumentos apresentados? Quais foram os aceitos? Quais foram os refutados? Quem foi vencedor, quem foi vencido? Como a historiografia responde a essas perguntas?

Essas questões ganham maior relevância ainda quando se nota que as respostas para essas questões históricas ainda não foram apresentadas ou, se foram, normalmente seguem um padrão canônico, estejam contidas em manuais didáticos, em artigos de divulgação<sup>7</sup>, de atualização ou mesmo em compêndios de história<sup>8</sup>: Euler é o grande herói, apresentado como o marco definitivo que separa a pré-história da história dos logaritmos, como aquele que separa o erro da verdade, a irracionalidade da racionalidade, como aquele que estabeleceu definitivamente a consistência, a objetividade, a harmonia e a beleza nesse campo da matemática. Tradicionalmente, destaca-se apenas os erros, os equívocos, a ignorância e a insuficiência teórica e metodológica de Leibniz, Bernouilli e d'Alembert, para citar apenas os mais famosos antecessores ou adversários de Euler em relação a esse assunto, enquanto se enfatiza a genialidade, os acertos, a perspicácia e a criatividade do gênio, do herói Euler.

Carl Boyer, por exemplo, constrói sua narrativa referindo-se aos fatos matemáticos bem aceitos atualmente como descobertas e percepções, embora se refira aos logaritmos reais dos números negativos como crenças erradas que dominaram o debate até que o brilhante Euler resolveu definitivamente a questão, esclarecendo a verdadeira natureza dos logaritmos. Para

Boyer, os melhores matemáticos do século XVIII, dentre os quais os Bernoulli, Leibniz e d'Alembert, deveriam ter percebido a verdade há mais tempo, já que essa jazia clara diante dos seus olhos, mas apenas o cego Euler apresentou a resposta correta para o problema! Portanto, é uma narrativa que põe em lados opostos as crenças de alguns matemáticos do século XVIII, julgadas erradas pela comparação com aquilo que se institucionalizou como correto e verdadeiro posteriormente, exatamente as idéias percebidas e descobertas somente por aquele considerado como o mais brilhante gênio matemático do século.<sup>9</sup>

### **LOGARITMOS: UMA HISTÓRIA DE CONTROVÉRSIAS**

A valorização social das habilidades de cálculo ocorreu durante a transição da Idade Média para a Moderna na Europa, por um lado em decorrência da ampliação das atividades comerciais, com o conseqüente incremento da circulação e da acumulação do capital monetário, como também, por outro lado, em virtude da chamada revolução científica galileana, que promoveu a matematização da produção de conhecimento sobre a natureza<sup>10</sup>. Em ambos os casos, indivíduos versados nas matemáticas deveriam efetuar cálculos aritméticos com mais eficiência e precisão, seja por conta da apuração dos juros nas crescentes operações financeiras de crédito, seja para atender às demandas das novas técnicas de escrituração contábil introduzidas na organização das empresas, seja para atender aos novos procedimentos empíricos e matemáticos da investigação científica do movimento dos corpos celestes e terrestres. As primeiras tabelas de logaritmos construídas com a finalidade precípua de simplificar a realização de cálculos aritméticos foram publicadas independentemente por John Napier (Escócia,1550-1617) e por Jost Bürgi (Suíça, 1552-1632)<sup>11</sup> no início do século XVII.

Embora a utilização de símbolos para indicar potências e raízes de um número tenha ocorrido antes da invenção dos logaritmos, esses símbolos não estavam ainda bem difundidos, de modo que Napier e Bürgi não utilizaram qualquer notação ou conceito exponencial no seu invento<sup>12</sup>. Ambos basearam a construção e a explicação das suas tabelas de logaritmos, por um lado, num modelo mecânico—geométrico de pontos em movimento, por outro lado, em

certas relações entre os termos de séries geométricas e aritméticas, que já eram conhecidos pelos menos desde Arquimedes, embora não existam registros de que tivessem sido empregadas concretamente para facilitar a realização de cálculos aritméticos<sup>13</sup>. É importante notar que a base do sistema de logaritmos, conceito central nas definições atuais que concebem o logaritmo como operação inversa da potenciação ou função inversa da exponencial, não tem qualquer significado nas primeiras definições.

Florian Cajori, na sua monografia histórica sobre logaritmos e exponenciais, talvez o único trabalho amplo e detalhado existente sobre o assunto, salienta, dentre outras coisas, que, embora as primeiras definições de logaritmo tenham sido mais gerais que as atuais, ele não conseguiu encontrar qualquer motivo, teórico ou prático, para a discussão dos logaritmos dos números negativos até 1712, quando Leibniz publicou um artigo a esse respeito<sup>14</sup>. Segundo ele, a definição de logaritmo adotada inicialmente e a forma como eram construídas as tabelas logarítmicas não propiciavam qualquer consideração sobre os logaritmos dos negativos, até porque essa definição e as tabelas atendiam perfeitamente as necessidades de computação prática para as quais foram construídas. Ficou registrada apenas uma controvérsia envolvendo Leibniz e Bernoulli, que discutiram o assunto por correspondência, num ambiente marcado por fortes dúvidas e questionamentos acerca da natureza dos números negativos e imaginários, que se mantiveram até o século XIX<sup>15</sup>. Esses aspectos são importantes para explicar a razão da controvérsia sobre a extensão da definição dos logaritmos para os negativos e imaginários e a sua duração até o século XIX.<sup>16</sup>

Os trabalhos que Euler escreveu sobre os logaritmos, contendo importantíssimas inovações na forma de tratá-los, foram escritos, ao que tudo indica e pelo menos parcialmente, sob a influência da discussão do assunto que teve por correspondência com Bernoulli entre 1727 e 1729 e da leitura das cartas trocadas por Leibniz e Bernoulli, que foram publicada em 1745. No célebre *Introductio in analysin infinitorum*, seu primeiro tratado de análise, escrito entre 1743 e 1744 e publicado em 1748, os logaritmos foram pela primeira vez apresentados sistematicamente como exponenciais, de uma forma muito semelhante àquela que é adotada

atualmente<sup>17</sup>. Depois de produzir uma demonstração para a fórmula  $\log(\cos \varnothing + i \sin \varnothing) = i\varnothing$ , depois batizada com o seu nome, Euler acreditou ter provado que todos os números possuem infinitos logaritmos imaginários, embora somente os positivos possuam um - único - logaritmo real. Euler também escreveu dois artigos, o primeiro, *Sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires*, em 1747, somente foi publicado em 1862, enquanto o segundo, *De la controverse entre Mrs. Leibnitz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires*, foi escrito em 1749 e publicado em 1751<sup>18</sup>. A abordagem que Euler deu ao assunto nesses dois artigos foi diferente: a demonstração apresentada no segundo artigo – que foi publicado primeiro - é baseada na utilização de infinitésimais – conceito muito discutido na época, assim como os negativos e imaginários – e não conseguiu convencer totalmente os matemáticos; enquanto a demonstração apresentada no primeiro artigo é essencialmente a mesma adotada atualmente, embora não tenha repercutido entre os matemáticos da época, justamente porque somente foi publicado em 1862.

Nesse mesmo período, quando Euler escreveu esses trabalhos, ele manteve uma controvérsia epistolar sobre os logaritmos dos negativos, desta vez com d'Alembert<sup>19</sup>, que também escreveu um artigo sobre o assunto<sup>20</sup>. Nas suas cartas, Euler tentou inutilmente convencê-lo sobre a verdade das suas teses, pois d'Alembert nunca concordou com ele, nem jamais desistiu de apresentar novos argumentos a favor de sua própria tese, a saber, que os logaritmos das quantidades negativas eram reais ou que, ao menos, poderiam ser supostos como tais. D'Alembert, na verdade, continuava definindo logaritmo pela correspondência entre os termos de uma progressão aritmética e de outra geométrica, como fizeram Napier e Bürgi, e não adotou a definição da função logarítmica como inversa da função exponencial, tal como foi proposta por Euler.<sup>21</sup>

René Taton<sup>22</sup> explicou que Euler e d'Alembert mantiveram um intenso comércio intelectual, abordando a maior parte das questões então em desenvolvimento ou em discussão. Ele destacou que esse intercâmbio, que se iniciou num clima cordial de reconhecimento recíproco, foi marcado por intermináveis discussões doutrinárias e

interrompeu-se em virtude de graves desentendimentos, que culminaram com uma série de acusações contra Euler, formuladas por d'Alembert. Assim como no caso entre Leibniz e Bernoulli, as diferenças entre d'Alembert e Euler transcendiam o âmbito da teoria dos logaritmos. As relações científicas entre Euler e d'Alembert estavam inseridas num contexto intelectual mais amplo, onde se destacavam diversos problemas relacionados com o sistema de mundo newtoniano, mais especificamente, as teorias das perturbações e o problema dos três corpos. Esse autor observou que a escolha do tema do concurso de 1748 da Academia de Paris, um caso particular desse último problema, teve uma influência considerável no desenvolvimento da mecânica celeste no século XVIII e despertou a atenção de importantes sábios da época, dentre os quais Euler e d'Alembert, que se dedicaram ao estudo teórico do problema dos três corpos e à elaboração de métodos de aproximação cada vez mais precisos para o cálculo dos seus principais casos particulares. Portanto, concluiu Taton, se Euler reconheceu o virtuosismo de de d'Alembert no domínio da análise, por outro lado, ele contestou a aplicabilidade dos seus métodos para a construção das tabelas astronômicas. Assim, sintetizou o autor, eram mais teóricos os interesses de d'Alembert, que pesquisava uma "*solução analítica*" e interessava-se "*aos métodos de integração bastante singulares*", enquanto eram mais pragmáticos os interesses de Euler, que buscava a aplicação da análise para a construção de tabelas astronômicas.

Em suma, para concluir, as controvérsias da história dos logaritmos não são tratadas apropriadamente nas narrativas canônicas encontradas nos livros didáticos, compêndios de história da matemática e artigos de divulgação. Tanto a controvérsia entre Leibniz e Bernoulli, quanto a controvérsia entre Euler e d'Alembert, foram marcadas por aspectos de diversas ordens, que variaram dos problemas teóricos específicos relacionados com a adoção da própria definição dos logaritmos e com as propriedades decorrentes da mesma, aos problemas teóricos e filosóficos associados aos conceitos dos números negativos e imaginários ou aos problemas institucionais que envolveram por exemplo d'Alembert e Euler. Esta constatação aponta para a necessidade de se investigar adequadamente a trajetória dessas controvérsias. Afinal de contas, como e porque, os matemáticos da época adotaram as definições propostas por Euler, aceitando suas teses sobre as propriedades dos logaritmos, mesmo com tantas dúvidas, questionamentos e contestações expressivas ainda existindo sobre o assunto?

## NOTAS

- <sup>1</sup> Catedrático de geometria analítica e cálculo infinitesimal da Escola Politécnica da Bahia (1917-1965). AMARAL, Leopoldo. Sobre os logarithmos reaes das quantidades negativas. *Revista Brasileira de Matemática Elementar*. Bahia, a. 1, n. 5 / 6, p. XIII-XV, jan./fev. 1930, a. 1, n. 7 / 9, p. XVII-XVIII, mar./mai. 1930.
- <sup>2</sup> MIORIM, Maria Ângela; MIGUEL, A. . Os logaritmos na cultura escolar brasileira. Campinas: UNICAMP, Rio Claro: SBHMat, 2001.
- <sup>3</sup> IEZZI, Gelson *et al.* *Matemática, 1ª série, 2º grau*, p. 152; LIMA, Elon Lages. Números negativos têm logaritmo? *Revista do Professor de Matemática*. São Paulo, n. 3, p. 20-24, 2. sem. 1983, p. 21; \_\_\_\_\_. *Logaritmos*. Rio de Janeiro: SBM, 1985, p.15.
- <sup>4</sup> LIMA, Elon Lages. Números negativos têm logaritmo?, p. 23-24.
- <sup>5</sup> KLEIN, Felix. *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*. New York: Dover, s.d., p. 144-145.
- <sup>6</sup> LIMA, Elon Lages. Números negativos têm logaritmo?, p. 21.
- <sup>7</sup> *Idem*, p. 22.
- <sup>8</sup> EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Campinas: UNICAMP, 1997; STRUIK, Dirk J. *História concisa das matemáticas*. Lisboa: Gradiva, 1992.
- <sup>9</sup> BOYER, Carl B. *História da matemática*. 2ª ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1998, p. 309.
- <sup>10</sup> BENOIT, PAUL. Cálculo, álgebra e comércio. In: SERRES, Michel. (dir.). *Elementos para uma história das ciências*. Lisboa: Terramar, 1996, v. II, p. 7-36; NEEDHAM, Joseph. Mathematics and science in China and the West. In: BARNES, Barry. *Sociology of Science*. Harmondsworth: Penguin Books, 1972, p. 30.
- <sup>11</sup> NAPIER, John. *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*. Edinburgh, 1614. \_\_\_\_\_. *Mirifici logarithmorum canonis constructio*. Edinbugh, 1619; BÜRGI, Jost. *Arithmetische und geometrische progresstabuln*. Praga, 1620.
- <sup>12</sup> KAUNZNER, Wolfgang. Logarithms. In: GRATTAN-GUINNESS, I. (ed.) *Companion encyclopedia of the history and philosophy of the mathematical sciences*. London: Routledge, 1994, p. 210-228 .
- <sup>13</sup> KAUNZNER, Wolfgang. Logarithms, p. 210, BOYER, Carl B. *História da matemática*, p. 20, p. 190.
- <sup>14</sup> *Acta Eruditorum*, 1712, p. 167-169.
- <sup>15</sup> SCHUBRING, Gert. Rupturas no estatuto matemático dos números negativos. *Boletim GEPEM*. Rio de Janeiro, n. 37/38, p. 51-64/73-93, ago. 2000/fev. 2001.
- <sup>16</sup> CAJORI, Florian. History of the exponential and logarithmic concepts, I-V. *The American Mathematical Monthly*, v. XX, n. 1 / 7, p. 5-14; 35-46; 75-84; 107-117; 148-151; 173-182; 205-210, jan./sep. 1913, p. 39.
- <sup>17</sup> EULER, Leonard. *Introduction à l'analyse infinitesimale, tome I*. Traduite du latin au français par J. B. Labey. Paris: Barrois, 1796. Paris: ACL, 1987. Chap. VI: Des quantités exponentielles & des logarihtmes, p. 69-84; Chap. VII: Du développement des quantités exponentielles & logarithmiques en séries, p. 84-92.
- <sup>18</sup> EULER, Leonhard. De la controverse entre Mrs. Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres negatifs et imaginaires. *Memoires de l'Académie des sciences de Berlim*, [5](1749), 1751, p. 139-179.
- <sup>19</sup> EULER, Leonhard. Correspondence Euler-d'Alembert. In: \_\_\_\_\_. *Opera Omnia*. Editores: A. Juskevic, R. Taton. Serie Quarta A, vol. V. Basel: Birkhäuser Verlag, 1980, p. 251-297.
- <sup>20</sup> D'ALEMBERT, J. Sur les logarithmes des quantités négatives, mémoire A. 80; Supplément. In: *Opuscules mathématiques*, v. 1. Paris, 1761, p. 180-209; p. 210-230.
- <sup>21</sup> D'ALEMBERT, J. *et. al.* Logarithme. In: *Encyclopédie méthodique: mathématiques, tome 2<sup>nd</sup>*. Paris: Panckoucke, 1785. Paris: ACL, 1987, p. 316-326.
- <sup>22</sup> TATON, René. Euler et D'Alembert. In: *Zum Werk Leonhard Eulers. Vorträge des Euler - Kolloquiums, Berlin, mai 1983*. Basel: Birkhäuser Verlag, 1984, p. 99.